

Ondes mécaniques, SMP6
Session de rattrapage, 2017
Durée : 2 heures

Le laboratoire est muni d'un référentiel terrestre $R(O, x, y, z)$ supposé galiléen, de base cartésienne $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ et dont l'axe Oz est vertical ascendant. On néglige les effets de la pesanteur et des frottements.

A – Question de cours

On considère une membrane de masse surfacique σ , disposée horizontalement et maintenue tendue à l'aide d'un champ de tension T_s . Le référentiel R est choisi de sorte que le plan Oxy coïncide avec la membrane à l'équilibre. On provoque une onde de déformation transversale $\mathbf{u}(x, y, t) = u(x, y, t) \mathbf{e}_z$ de faible amplitude, se propageant sur la membrane. On admettra en outre que les tangentes à la membrane font avec le plan Oxy des angles petits.

1) Soit (ABCD) un élément rectangulaire de la membrane dont l'arête (AB), de longueur δx , est disposée, à l'équilibre, parallèlement à l'axe Ox et l'arête (DA), de longueur δy , est disposée parallèlement à l'axe Oy . Le sommet A a pour coordonnées (x, y) dans le plan Oxy .

a) i) On désigne par $\theta_x(x, y, t)$ l'angle que fait, avec le plan Oxy , la tangente à la membrane dans un plan vertical parallèle à Ox . On admet que cet angle est le même en tout point du côté (AB). Donner l'expression de $\theta_x(x, y, t)$ en fonction de $u(x, y, t)$.

ii) En déduire l'expression de son homologue $\theta_x(x + \delta x, y, t)$ sur l'arête (CD) en fonction de $u(x + \delta x, y, t)$.

b) i) De même, on désigne par $\theta_y(x, y, t)$ l'angle que fait, avec le plan Oxy , la tangente à la membrane dans un plan vertical parallèle à Oy . On admet que cet angle est le même en tout point du côté (BC). Donner l'expression de $\theta_y(x, y, t)$ en fonction de $u(x, y, t)$.

ii) En déduire l'expression de son homologue $\theta_y(x, y + \delta y, t)$ sur l'arête (DA) en fonction de $u(x, y + \delta y, t)$.

c) Exprimer, en projection sur les vecteurs de la base cartésienne, les forces de tension $\delta \mathbf{T}_x$ et $\delta \mathbf{T}'_x$ de modules $T_s(x, y) \delta y$ et $T_s(x + \delta x, y) \delta y$, appliquées, tangentielllement à la membrane, sur les arêtes (AB) et (CD).

d) De même, exprimer les forces de tension $\delta \mathbf{T}_y$ et $\delta \mathbf{T}'_y$ de modules $T_s(x, y) \delta x$ et $T_s(x, y + \delta y) \delta x$, appliquées, tangentielllement à la membrane, sur les arêtes (DA) et (BC).

2) a) Exprimer, en projection sur les vecteurs de la base cartésienne, le principe fondamental de la dynamique appliqué au mouvement de l'élément (ABCD) dont on assimile le vecteur position au vecteur \mathbf{OA} .

b) En déduire que :

$$T_s(x + \delta x, y) = T_s(x, y + \delta y) = T_s(x, y) = \text{cte} = T_s.$$

3) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par le déplacement $u(x, y, t)$ est une équation d'onde dont on précisera la vitesse de phase v_p .

B – Problème

I – Chaîne linéaire discrète

Soit une suite linéique de corps identiques de masse m , séparés deux à deux à l'équilibre d'une distance a (figure 1). Ces corps sont couplés à l'aide de ressorts identiques de masse négligeable, de raideur K et de longueur à vide l_0 .

On néglige l'effet des autres forces appliquées à la chaîne. Si l'on impose à l'un des corps un faible mouvement oscillatoire transversal ou longitudinal, celui-ci se transmet, du fait du couplage, au reste des corps de la chaîne.

Le référentiel d'étude R est choisi de sorte que l'axe Ox soit confondu avec la chaîne au repos, l'origine O étant prise sur l'un des corps. À l'équilibre, le corps numéroté n à partir du corps origine, où n est un entier relatif, a pour abscisse $x_n = na$. Le déplacement par rapport à cette position est noté $u_n = u(x_n, t)$. On suppose que les déplacements u_n sont très petits par rapport à la distance a .

Les corps sont assujettis à des déplacements transversaux selon l'axe Oz . Soient u_{n-1} , u_n et u_{n+1} les écartements des corps numérotés respectivement $n-1$, n et $n+1$ (figure 2). On suppose que les ressorts de couplage sont constamment étirés ($l_0 < a$).

1) a) Exprimer, en fonction des déplacements u_{n-1} , u_n et u_{n+1} , les angles θ_n^- et θ_n^+ que font, avec Ox , les ressorts couplant le corps n respectivement avec les corps $n-1$ et $n+1$.

b) Donner les expressions des composantes selon Oz , F_{nz}^- et F_{nz}^+ , des forces \mathbf{F}_n^- et \mathbf{F}_n^+ qu'exercent respectivement ces deux ressorts sur le corps n . On écrira les expressions en fonction de u_{n-1} , u_n et u_{n+1} .

2) Exprimer le principe fondamental de la dynamique appliqué au mouvement du corps n .

3) On se met dans la situation des grandes longueurs d'onde où la séparation a paraît tellement petite que les abscisses $x_n = na$ peuvent être considérées comme continues ; les déplacements sont alors des fonctions de x et de t : $u_n(t) \equiv u(na, t) = u(x, t)$.

a) Réécrire l'équation obtenue à la question 2) ci-dessus où les déplacements sont écrits sans les indices mais considérés comme des fonctions de l'abscisse x et du temps t .

b) En procédant, dans cette équation, à un développement à l'ordre 2 en a , montrer que le déplacement $u(x, t)$ vérifie une équation d'onde dont on exprimera la vitesse de phase v_p .

c) Montrer que cette dernière est celle d'une onde transversale se propageant le long d'une corde de masse linéique μ_0 , tendue par une tension T qu'on exprimera en fonction des données du problème.

II – Vibration transversale d'un réseau carré

Soit maintenant un réseau plan carré formé de rangées et de colonnes de corps identiques de masse m , séparés deux à deux à l'équilibre d'une distance a (figure 3). Ces corps sont couplés à l'aide de ressorts identiques de masse négligeable, de raideur K et de longueur à vide l_0 . On suppose que les ressorts de couplage sont constamment étirés ($l_0 < a$).

Le référentiel d'étude R est choisi de sorte que le plan Oxy soit confondu avec le plan de la chaîne au repos, l'origine O étant prise sur l'un des corps. À l'équilibre, le corps numéroté (m, n) à partir du corps origine, où m et n sont des entiers relatifs, a pour coordonnées $x_n = ma$ et $y_n = na$. Le déplacement

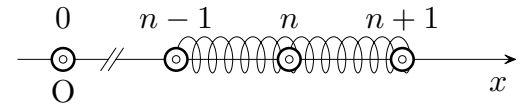


FIGURE 1

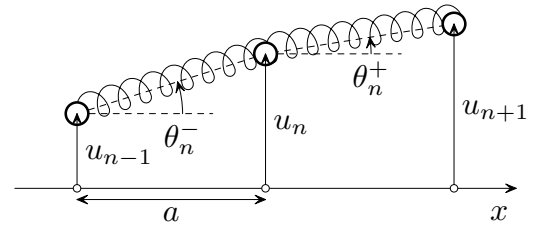


FIGURE 2

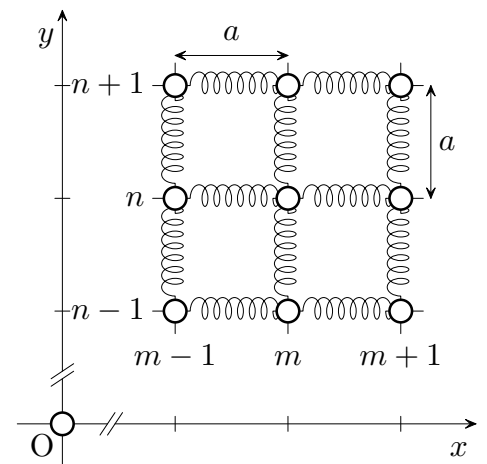


FIGURE 3

par rapport à cette position est noté $u_{m,n}(t) = u(x_m, y_n, t)$. On suppose que les déplacements $u_{m,n}$ sont très petits par rapport à la distance a .

Les corps sont assujettis à des déplacements transversaux, selon l'axe Oz. Soient $u_{m-1,n}$, $u_{m+1,n}$, $u_{m,n-1}$ et $u_{m,n+1}$ les écartements des corps plus proches voisins du corps (m, n) (figure 3).

1) a) Exprimer les angles θ_m^- et θ_m^+ que font, avec l'axe Ox, les ressorts couplant le corps (m, n) avec les corps $(m-1, n)$ et $(m+1, n)$.

b) Donner les expressions de la composante selon Oz, F_{mz}^- et F_{mz}^+ , des forces \mathbf{F}_m^- et \mathbf{F}_m^+ qu'exercent respectivement ces deux ressorts sur le corps (m, n) .

2) a) Exprimer les angles θ_n^- et θ_n^+ que font, avec l'axe Oy, les ressorts couplant le corps (m, n) avec les corps $(m, n-1)$ et $(m, n+1)$.

b) Donner les expressions de la composante selon Oz des forces \mathbf{F}_n^- et \mathbf{F}_n^+ qu'exercent respectivement ces deux ressorts sur le corps (m, n) .

3) Écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué au mouvement du corps (m, n) .

4) On se met dans la situation des grandes longueurs d'onde où la séparation a paraît tellement petite que les abscisses $x = ma$ et les ordonnées $y = na$ peuvent être considérées comme continues ; les déplacements sont alors des fonctions de x , y et de t : $u_{m,n}(t) \equiv u(ma, na, t) = u(x, y, t)$.

a) Réécrire l'équation obtenue à la question 3) ci-dessus où les déplacements sont exprimés sans les indices mais considérés comme fonctions des coordonnées (x, y) et du temps t .

b) En procédant, dans cette équation, à un développement à l'ordre 2 en a , montrer que le déplacement $u(x, y, t)$ vérifie une équation d'onde dont on exprimera la vitesse de phase v_p .

c) Montrer que cette dernière est celle d'une onde transversale se propageant sur une membrane de masse surfacique σ_0 , tendue sous l'effet d'un champ de tension T_s qu'on exprimera en fonction des données du problème.

C – Questions sur les travaux pratiques

On réalise une expérience utilisant des ondes acoustiques de fréquence 40 kHz. L'émetteur et le récepteur sont des transducteurs piézoélectriques de bande passante centrée autour de cette fréquence et de largeur de quelques centaines de hertz.

1) On place le récepteur à une distance $d = 20$ cm de l'émetteur et on mesure l'amplitude crête-à-crête U_r du signal détecté en fonction de l'angle φ que fait l'axe du récepteur avec celui de l'émetteur. Les résultats de mesure sont groupés dans le tableau 1.

φ (°)	-140	-130	-120	-110	-100	-90	-80	-70	-60	-50	-40
U_r (V)	0.025	0.024	0.019	0.017	0.018	0.025	0.027	0.03	0.046	0.065	0.112

-30	-20	-10	0	10	20	30	40	50
0.158	0.213	0.251	0.249	0.249	0.216	0.162	0.109	0.067

60	70	80	90	100	110	120	130	140
0.044	0.031	0.025	0.027	0.016	0.016	0.018	0.025	0.024

TABLEAU 1

a) Tracer, en coordonnées polaires, la courbe représentant les variations de U_r en fonction de φ .

b) Conclure.

2) Les axes du récepteur et de l'émetteur sont maintenant confondus. On mesure l'amplitude U_r en fonction de la distance d . Les résultats de mesure sont groupés dans le tableau 2.

d (cm)	10	15	20	25	30	35	40
U_r (V)	0.46	0.316	0.245	0.201	0.158	0.13	0.116
$d_0 U_0 / U_r$ (cm)							

45	50	55	60	65	70	75	80
0.102	0.091	0.085	0.076	0.072	0.067	0.062	0.058

TABLEAU 2

a) Compléter ce tableau en calculant la quantité $d_0 U_0 / U_r$ dans laquelle $d_0 = 10$ cm et $U_0 = U_r(d_0)$.

b) Tracer la courbe représentant les variations de cette quantité en fonction de la distance d . On adoptera l'échelle 1:10.

b) En déduire l'expression de $U_r(d)$ en fonction de d_0 et U_0 .

Corrigé de l'épreuve d'ondes mécaniques SMP6, session de rattrapage 2017

A – Question de cours

1) a) i) Dans un plan vertical parallèle à Ox , l'angle $\theta_x(x, y, t)$ que fait la tangente à la membrane avec le plan Oxy est tel que :

$$\operatorname{tg} \theta_x(x, y, t) = \frac{u(x + \delta x, y, t) - u(x, y, t)}{\delta x}.$$

En développant $u(x + \delta x, y, t)$ au premier ordre en δx , on a après arrangement :

$$\operatorname{tg} \theta_x(x, y, t) \simeq \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}.$$

L'angle θ_x étant petit par hypothèse, il vient :

$$\theta_x(x, y, t) \simeq \operatorname{tg} \theta_x(x, y, t) \simeq \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}.$$

ii) Sur l'arête (CD), située à l'abscisse $x + \delta x$, l'homologue de cet angle vaut :

$$\theta_x(x + \delta x, y, t) \simeq \frac{\partial u(x + \delta x, y, t)}{\partial x}.$$

b) i) Une démarche analogue à celle faite en 1) a) i) conduit à :

$$\theta_y(x, y, t) \simeq \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}.$$

ii) Sur l'arête (CD), située à l'abscisse $y + \delta y$, l'homologue de cet angle vaut :

$$\theta_y(x + \delta x, y, t) \simeq \frac{\partial u(x, y + \delta y, t)}{\partial y}.$$

c) Les forces de tension appliquées, tangentiellement à la membrane, sur les arêtes (AB) et (CD) s'expriment :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{T}_x &= -T_s(x, y) \delta y [\cos \theta_x(x, y, t) \mathbf{e}_x + \sin \theta_x(x, y, t) \mathbf{e}_z] \\ \delta \mathbf{T}'_x &= T_s(x + \delta x, y) \delta y [\cos \theta_x(x + \delta x, y, t) \mathbf{e}_x + \sin \theta_x(x + \delta x, y, t) \mathbf{e}_z]. \end{aligned}$$

Les inclinaisons étant petites, il vient :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{T}_x &\simeq -T_s(x, y) \delta y [\mathbf{e}_x + \theta_x(x, y, t) \mathbf{e}_z] \\ \delta \mathbf{T}'_x &\simeq T_s(x + \delta x, y) \delta y [\mathbf{e}_x + \theta_x(x + \delta x, y, t) \mathbf{e}_z]. \end{aligned}$$

d) De même, les forces de tension appliquées, tangentiellement à la membrane, sur les arêtes (DA) et (BC) s'expriment :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{T}_y &= -T_s(x, y) \delta x [\cos \theta_y(x, y, t) \mathbf{e}_y + \sin \theta_y(x, y, t) \mathbf{e}_z] \\ &\simeq -T_s(x, y) \delta x [\mathbf{e}_y + \theta_y(x, y, t) \mathbf{e}_z] \\ \delta \mathbf{T}'_y &= T_s(x, y + \delta y) \delta x [\cos \theta_y(x + \delta x, y, t) \mathbf{e}_y + \sin \theta_y(x + \delta x, y, t) \mathbf{e}_z] \\ &\simeq T_s(x, y + \delta y) \delta x [\mathbf{e}_y + \theta_y(x, y + \delta y, t) \mathbf{e}_z]. \end{aligned}$$

2) a) Le principe fondamental de la dynamique appliqué au mouvement de l'élément (ABCD), repéré par le vecteur position \mathbf{OA} , s'exprime :

$$\sigma \delta x \delta y \frac{\partial^2 \mathbf{OA}}{\partial t^2} = \delta \mathbf{T}_x + \delta \mathbf{T}'_x + \delta \mathbf{T}_y + \delta \mathbf{T}'_y$$

abstraction faite des effets de la pesanteur et des frottements. En projection sur les vecteurs de la base cartésienne, on a :

$$0 = -T_s(x, y) \delta y + T_s(x + \delta x, y) \delta y$$

$$0 = -T_s(x, y) \delta x + T_s(x, y + \delta y) \delta x$$

$$\sigma \delta x \delta y \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = -T_s(x, y) \delta y \theta_x(x, y, t) + T_s(x + \delta x, y) \delta y \theta_x(x + \delta x, y, t) - \\ - T_s(x, y) \delta x \theta_y(x, y, t) + T_s(x, y + \delta y) \delta x \theta_y(x, y + \delta y, t)$$

b) Les deux premières équations donnent :

$$T_s(x + \delta x, y) = T_s(x, y + \delta y) = T_s(x, y) = \text{cte} = T_s .$$

3) La dernière équation dans 2) a) s'arrange donc :

$$\sigma \delta x \delta y \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = T_s \{ \delta y [\theta_x(x + \delta x, y, t) - \theta_x(x, y, t)] + \\ + \delta x [\theta_y(x, y + \delta y, t) - \theta_y(x, y, t)] \} .$$

Compte tenu des expressions des angles θ_x et θ_y , on a :

$$\sigma \delta x \delta y \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = T_s \left\{ \delta y \left[\frac{\partial u(x + \delta x, y, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \right] + \right. \\ \left. + \delta x \left[\frac{\partial u(x, y + \delta y, t)}{\partial y} - \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \right] \right\} ,$$

soit en faisant des développements limités à l'ordre 1 en δx et δy :

$$\sigma \delta x \delta y \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = T_s \delta x \delta y \left[\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right] .$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} - \frac{\sigma}{T_s} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 .$$

C'est une équation d'onde dont la vitesse de phase est :

$$v_p = \sqrt{\frac{T_s}{\sigma}} .$$

B – Problème

I – Chaîne linéaire discrète

1) a) Les angles θ_n^- et θ_n^+ que font, avec Ox , les ressorts couplant le corps n respectivement avec les corps $n - 1$ et $n + 1$ sont tels que :

$$\text{tg } \theta_n^- = \frac{u_n - u_{n-1}}{a} \\ \text{tg } \theta_n^+ = \frac{u_{n+1} - u_n}{a} .$$

Comme les déplacements restent faibles comparés à a , ces tangentes sont petites et alors :

$$\theta_n^- \simeq \text{tg } \theta_n^- = \frac{u_n - u_{n-1}}{a} \\ \theta_n^+ \simeq \text{tg } \theta_n^+ = \frac{u_{n+1} - u_n}{a} .$$

b) Les forces \mathbf{F}_n^- et \mathbf{F}_n^+ qu'exercent respectivement ces deux ressorts sur le corps n ont pour composante selon Oz :

$$\begin{aligned} F_{nz}^- &= -K(l_n^- - l_0) \sin \theta_n^- \simeq -K(l_n^- - l_0) \theta_n^- \\ F_{nz}^+ &= K(l_n^+ - l_0) \sin \theta_n^+ \simeq K(l_n^+ - l_0) \theta_n^+ \end{aligned}$$

où $l_n^- = a / \cos \theta_n^-$ et $l_n^+ = a / \cos \theta_n^+$ sont les longueurs des deux ressorts. Les inclinaisons étant faibles, celles-ci sont donc pratiquement égales à la séparation a . Ainsi :

$$\begin{aligned} F_{nz}^- &\simeq -K(a - l_0) \theta_n^- = -\frac{K(a - l_0)}{a} (u_n - u_{n-1}) \\ F_{nz}^+ &\simeq K(a - l_0) \theta_n^+ = \frac{K(a - l_0)}{a} (u_{n+1} - u_n) . \end{aligned}$$

2) Le principe fondamental de la dynamique appliqué au mouvement du corps n s'écrit :

$$m \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} = F_{nz}^- + F_{nz}^+ = \frac{K(a - l_0)}{a} [u_{n+1}(t) + u_{n-1}(t) - 2u_n(t)] .$$

3) a) Cette équation se réécrit dans l'approximation des grandes longueurs d'onde :

$$m \frac{\partial^2 u(x, t)}{dt^2} = \frac{K(a - l_0)}{a} [u(x + a, t) + u(x - a, t) - 2u(x, t)] .$$

b) La séparation a étant petite, on peut procéder à un développement limité à l'ordre 2 de $u(x \pm a, t)$:

$$\begin{aligned} u(x + a, t) &\simeq u(x, t) + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \\ u(x - a, t) &\simeq u(x, t) - a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} ; \end{aligned}$$

d'où :

$$m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = Ka(a - l_0) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} ,$$

soit :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{m}{Ka(a - l_0)} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0 .$$

C'est une équation d'onde dont la vitesse de phase est :

$$v_p = \sqrt{\frac{Ka(a - l_0)}{m}} .$$

c) En posant :

$$\mu_0 = \frac{m}{a} \quad \text{et} \quad T = K(a - l_0) ,$$

la vitesse de phase se réécrit :

$$v_p = \sqrt{\frac{T}{\mu_0}} .$$

C'est la vitesse de phase d'une onde transversale se propageant le long d'une corde de masse linéique μ_0 , tendue par une tension T .

II – Vibration transversale d'un réseau carré

1) a) Les angles θ_m^- et θ_m^+ que font, avec Ox , les ressorts couplant le corps (m, n) respectivement avec les corps $(m - 1, n)$ et $(m + 1, n)$ sont tels que (figure 4) :

$$\begin{aligned} \text{tg } \theta_m^- &= \frac{u_{m,n} - u_{m-1,n}}{a} \\ \text{tg } \theta_m^+ &= \frac{u_{m+1,n} - u_{m,n}}{a} . \end{aligned}$$

Comme les ressorts restent faiblement inclinés par rapport au plan Oxy , on a encore :

$$\begin{aligned}\theta_m^- &\simeq \operatorname{tg} \theta_m^- = \frac{u_{m,n} - u_{m-1,n}}{a} \\ \theta_m^+ &\simeq \operatorname{tg} \theta_m^+ = \frac{u_{m+1,n} - u_{m,n}}{a} .\end{aligned}$$

b) Les forces \mathbf{F}_m^- et \mathbf{F}_m^+ qu'exercent respectivement ces deux ressorts sur le corps (m, n) ont pour composante selon Oz :

$$\begin{aligned}F_{mz}^- &= -K(l_m^- - l_0) \sin \theta_m^- \simeq -K(l_m^- - l_0) \theta_m^- \\ F_{mz}^+ &= K(l_m^+ - l_0) \sin \theta_m^+ \simeq K(l_m^+ - l_0) \theta_m^+\end{aligned}$$

où $l_m^- = a / \cos \theta_m^-$ et $l_m^+ = a / \cos \theta_m^+$ sont les longueurs des deux ressorts. Les inclinaisons étant faibles, celles-ci sont donc pratiquement égales à la séparation a . Ainsi :

$$\begin{aligned}F_{mz}^- &\simeq -K(a - l_0) \theta_m^- = -\frac{K(a - l_0)}{a} (u_{m,n} - u_{m-1,n}) \\ F_{mz}^+ &\simeq K(a - l_0) \theta_m^+ = \frac{K(a - l_0)}{a} (u_{m+1,n} - u_{m,n}) .\end{aligned}$$

2) a) De même, les angles θ_n^- et θ_n^+ que font, avec Oy , les ressorts couplant le corps (m, n) respectivement avec les corps $(m, n-1)$ et $(m, n+1)$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}\theta_n^- &\simeq \operatorname{tg} \theta_n^- = \frac{u_{m,n} - u_{m,n-1}}{a} \\ \theta_n^+ &\simeq \operatorname{tg} \theta_n^+ = \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n}}{a} .\end{aligned}$$

b) Les forces \mathbf{F}_n^- et \mathbf{F}_n^+ qu'exercent respectivement ces deux ressorts sur le corps (m, n) ont pour composante selon Oz :

$$\begin{aligned}F_{nz}^- &= -K(l_n^- - l_0) \sin \theta_n^- \simeq -K(l_n^- - l_0) \theta_n^- \\ F_{nz}^+ &= K(l_n^+ - l_0) \sin \theta_n^+ \simeq K(l_n^+ - l_0) \theta_n^+\end{aligned}$$

où $l_n^- = a / \cos \theta_n^- \simeq a$ et $l_n^+ = a / \cos \theta_n^+ \simeq a$ sont les longueurs des deux ressorts. Il vient :

$$\begin{aligned}F_{nz}^- &\simeq -K(a - l_0) \theta_n^- = -\frac{K(a - l_0)}{a} (u_{m,n} - u_{m,n-1}) \\ F_{nz}^+ &\simeq K(a - l_0) \theta_n^+ = \frac{K(a - l_0)}{a} (u_{m,n+1} - u_{m,n}) .\end{aligned}$$

3) Le principe fondamental de la dynamique appliqué au mouvement du corps (m, n) s'écrit :

$$\begin{aligned}m \frac{d^2 u_{m,n}(t)}{dt^2} &= F_{mz}^- + F_{mz}^+ + F_{nz}^- + F_{nz}^+ \\ &= \frac{K(a - l_0)}{a} [u_{m+1,n}(t) + u_{m-1,n}(t) + u_{m,n+1}(t) + u_{m,n-1}(t) - 4u_{m,n}(t)] .\end{aligned}$$

4) a) Cette équation se réécrit dans l'approximation des grandes longueurs d'onde :

$$\begin{aligned}m \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} &= \frac{K(a - l_0)}{a} [u(x + a, y, t) + u(x - a, y, t) + \\ &\quad + u(x, y + a, t) + u(x, y - a, t) - 4u(x, y, t)] .\end{aligned}$$

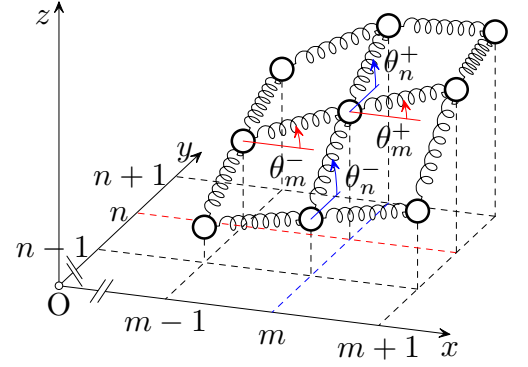


FIGURE 4

b) La séparation a étant petite, on peut procéder à un développement limité à l'ordre 2 de $u(x \pm a, y, t)$ et $u(x, y \pm a, t)$:

$$\begin{aligned} u(x+a, y, t) &\simeq u(x, y, t) + a \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} \\ u(x-a, y, t) &\simeq u(x, y, t) - a \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} \\ u(x, y+a, t) &\simeq u(x, y, t) + a \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \\ u(x, y-a, t) &\simeq u(x, y, t) - a \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} ; \end{aligned}$$

d'où :

$$m \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = Ka(a - l_0) \left[\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right] ,$$

soit :

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} - \frac{m}{Ka(a - l_0)} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 .$$

C'est une équation d'onde dont la vitesse de phase est :

$$v_p = \sqrt{\frac{Ka(a - l_0)}{m}} .$$

c) En posant :

$$\sigma_0 = \frac{m}{a^2} \quad \text{et} \quad T_s = \frac{K(a - l_0)}{a} ,$$

la vitesse de phase se réécrit :

$$v_p = \sqrt{\frac{T}{\sigma_0}} .$$

C'est la vitesse de phase d'une onde transversale se propageant sur une membrane de masse surfacique σ_0 , tendue par un champ de tension T_s .

C – Questions sur les travaux pratiques

1) a) La figure 5 montre les variations, en coordonnées polaires, de U_r en fonction de φ . Une mesure (φ, U_r) est représentée sur le graphe par un point M de rayon vecteur $OM = U_r$ et d'angle polaire φ .

b) L'émission acoustique est prononcée dans la direction $\varphi = 0^\circ$ et diminue à fur et à mesure quand on s'en écarte de plus en plus pour atteindre un minimum à $\varphi = 90^\circ$.

2) a) Le tableau 2 contient à présent les valeurs de la quantité $d_0 U_0 / U_r$ où $d_0 = 10$ cm et $U_0 = U_r(d_0)$.

d (cm)	10	15	20	25	30	35	40
$U_r(V)$	0.46	0.316	0.245	0.201	0.158	0.13	0.116
$d_0 U_0 / U_r$ (cm)	10.00	14.55	18.77	22.88	29.11	35.38	39.65

45	50	55	60	65	70	75	80
0.102	0.091	0.085	0.076	0.072	0.067	0.062	0.058
45.09	50.54	54.11	60.52	63.88	68.65	74.19	79.31

TABLEAU 2

b) La figure 6 montre les variations de $d_0 U_0 / U_r$ en fonction de la distance d .

c) La courbe ainsi tracée est une droite de pente $A = 1$ et passant par l'origine ;
d'où :

$$\frac{d_0 U_0}{U_r} = Ad = d ,$$

et alors :

$$U_r = \frac{U_0}{d_0} d .$$

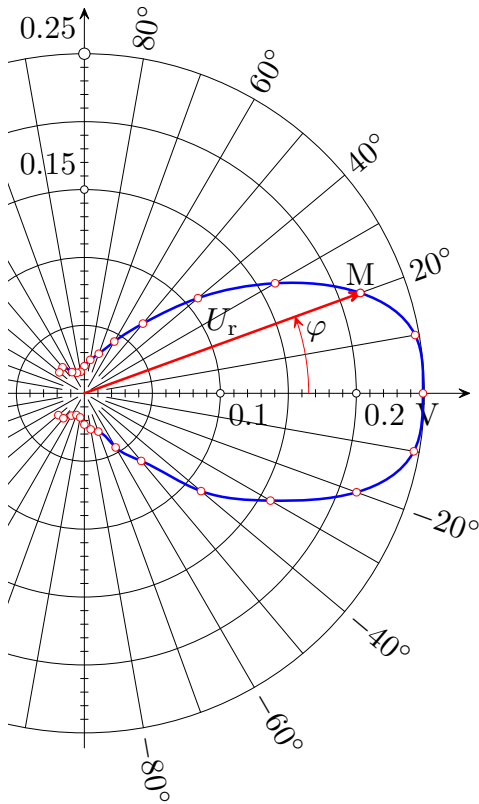


FIGURE 5

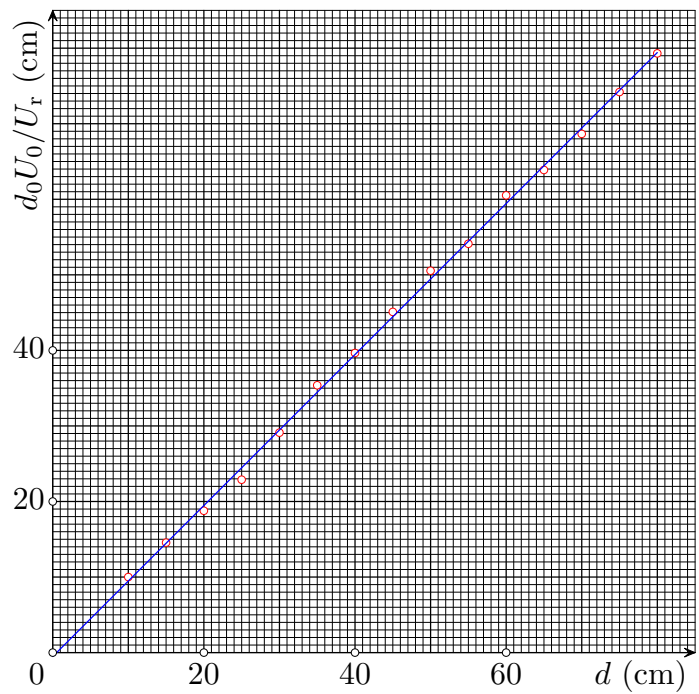


FIGURE 6